

Mr. Smith とインピーダンスマッチングの話

【第 29 話】低雑音増幅器 (LNA) のインピーダンスマッチング (その 3・ノイズパラメータ)

濱田 倫一

第 28 話では、ノイズパラメータの中身は触れずにおいて、とりあえず NF マッチについてご紹介しました。とりあえず使い方は判って頂けたと思うので、今回はノイズパラメータとは何か……について解説します。少々退屈な話になるかもしれませんが、お付き合いください。

■ 1. R_n って結局……何?

第 28 話の復習になりますが、ノイズパラメータとは以下の 3 つのパラメータから構成されるものでした。

- ①NF、または F_{min} : そのデバイスの最小雑音指数[dB]
- ② Γ_{OPT} : F_{min} となる信号源インピーダンス
- ③ R_n : 等価雑音抵抗[Ω]

このうち①と②については第 28 話の中で取り上げましたので、その使い方はお判り頂けたと思います。一方で等価雑音抵抗 R_n については全く触れませんでした。LNA を設計する際、反射損失の影響なく信号源インピーダンスを Γ_{OPT} に変換することができて、かつトランジスタが安定動作すれば何ら問題ないのですが、信号源インピーダンスを Γ_{OPT} に変換することが困難な場合に R_n は重要なパラメータとなります。 R_n を知る為には雑音の等価回路を知る必要があります。

図 1 は第 26 話、第 27 話で繰り返し登場している、増幅器の雑音指数(NF)の概念図です。既にご説明したとおり低雑音増幅器(LNA)で取り扱う雑音は、信号源に含まれる雑音(図では N_{th})と増幅器が付加する雑音(図では N_a)に分類されます。

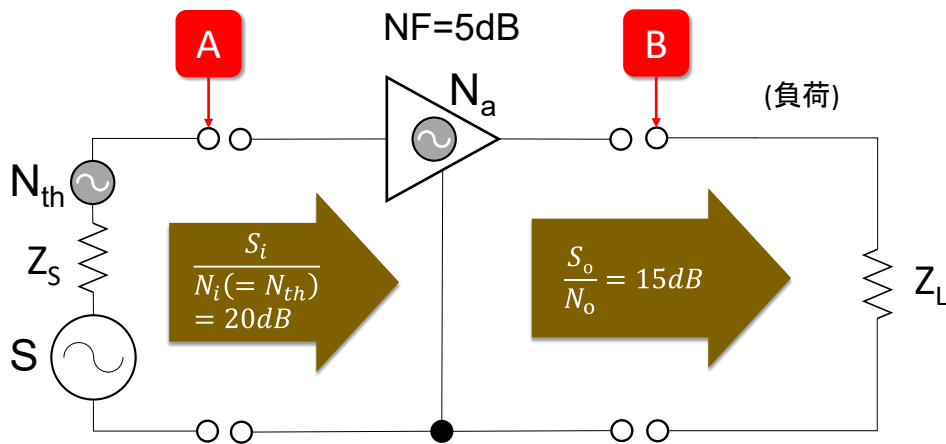


図1 雑音の概念(第26話の図5から再掲)

N_{th} は熱雑音なので平均電力 kTB (k はボルツマン定数、 T は絶対温度、 B は帯域幅) の大きさを持つものでした。 N_a はトランジスタの場合ショット雑音が主体で、その大きさは雑音指数 NF という諸元で表現されるとご説明しました。トランジスタがどれだけの雑音が発生するのかについては、ここまでの概念で充分なのですが、回路設計の観点で実際に N_a を小さくしたいと思ったときは、もう少し踏み込んで理解する必要があります。

信号源や増幅器で発生する雑音電力が増幅器の出力信号の SNR にどれだけ影響するかを知るためには各雑音源を「電源」として捉え、それらのインピーダンスを知る必要があります。図1において、 N_{th} は信号源インピーダンス Z_s の両端に観測される雑音電圧なので、これを電源と見なした場合のインピーダンスは Z_s となります。では N_a はどのように考えれば良いのでしょうか。まず N_a の等価回路の基本的な考え方を図2に示します。

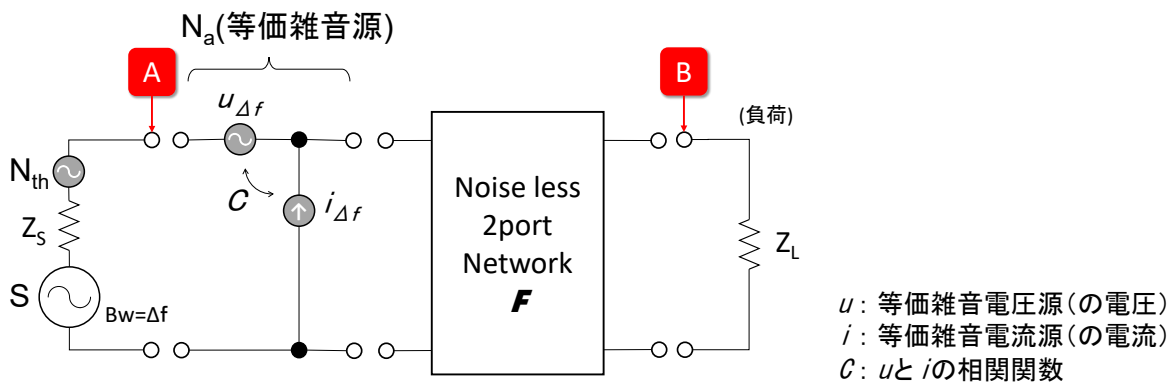


図2 雑音を有する増幅器の等価回路(図1からの置き換え)

図 2 において A、B と書かれたポイントは図 1 の A、B と同一箇所です。入出力の線形性が担保される条件下では、トランジスタ(増幅器)はノイズレスの 2 ポート(4 端子)回路網と、その入力に縦続接続された雑音源(相関のある雑音電圧源と雑音電流源の組み合わせ→これも 2 ポート回路網)に置き換えることが可能です。図 2 では、"Noise less 2port network"がノイズレスのトランジスタの特性を表し、その入力端子に等価雑音源 N_a が接続されています。実際のトランジスタは、その内部で雑音を発生するわけですが、その全てを入力側に接続された電圧源、電流源に置き換えて表現しています(故に「等価」と書かれています)。なお、雑音電圧と信号電圧を区別するため、本図以降、雑音電圧の記号には u を用います。また雑音電力は広い周波数帯域に分布するため、通常は電力密度(帯域幅 1Hz あたりの電力)で表されます。これに対して SNR の定義で使用する雑音電力は、信号の周波数帯域に存在する雑音電力の事なので、図 2 に示した等価雑音電圧源、等価雑音電流源の記号には信号 S の帯域内の雑音電圧、電流という趣旨で添字" Δf "の添字をつけています。

ちなみに「入出力の線形性が担保される条件」とはどういうことでしょうか。増幅素子の S パラメータは、その素子の動作点(トランジスタの場合はコレクタ電流 I_C の値)に依存して変化します(→第 16 話参照)。つまり非線形性を有しているのですが、 S パラメータを用いて整合回路の設計を行う時は、ある動作点において小信号動作(→第 24 話参照)している条件…つまり取り扱う信号の影響で素子の動作点が動かないと見なせる条件…であれば、線形等価回路に置き換えて考えても差し支えないという前提で、線形回路として取り扱いました。

増幅素子の NF(すなわち N_a の大きさ)もこれと同様で、素子の動作点(トランジスタの場合はコレクタ電流 I_C の値)に依存して変化しますが、LNA は小信号増幅回路であり、素子の動作点は入力信号の振幅で変化しないという前提条件の下、雑音等価回路は線形動作すると考える…と言うことです。図 2 の増幅器部分(A~B 間)のみを切り出したのが図 3 です。これを雑音等価回路と呼びます。

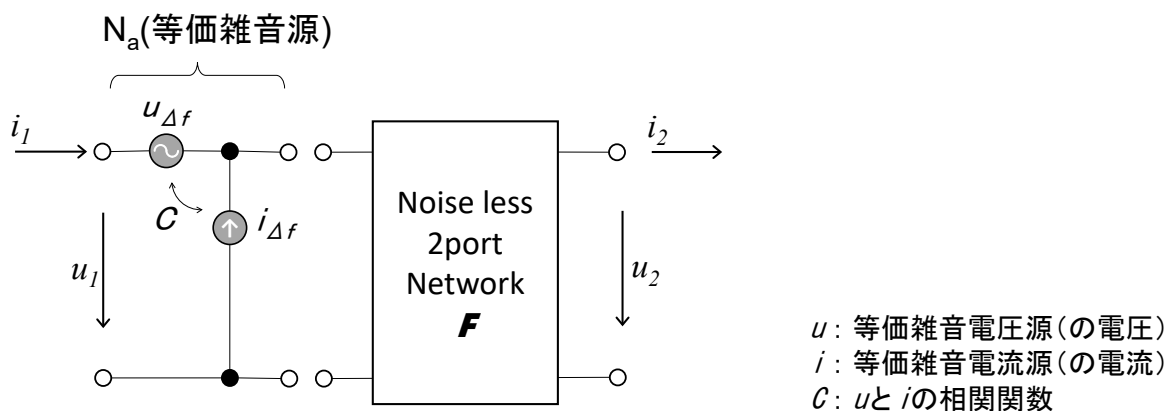


図 3 等価雑音源とノイズレスの 2 ポート回路網(雑音等価回路)

ここで \mathbf{F} はノイズレスの 2 ポート回路網の特性を規定する \mathbf{F} パラメータ(第 10 話参照)です。4 端子パラメータであれば良いので、 \mathbf{y} パラメータや \mathbf{h} パラメータでも構いませんが、雑音の議論においては電圧源・電流源で N_a の等価回路を記述しており、電圧/電流の議論をすることになるので、 \mathbf{S} パラメータでは不便です。この回路の入出力特性は(式 1-1)で規定されます。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{\Delta f} \\ i_{\Delta f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{\Delta f} \\ i_{\Delta f} \end{bmatrix}$$

(式 1-1)

連立方程式の形に書き換えると(式 1-2)のようになります。右辺の第 1 項と第 2 項がノイズレスの 2 ポート回路網(デバイス)の電圧・電流に関わる項、第 3 項が雑音電圧・電流に関わる項です。

$$\begin{aligned} u_1 &= Au_2 + Bi_2 + u_{\Delta f} \\ i_1 &= Cu_2 + Di_2 + i_{\Delta f} \end{aligned}$$

(式 1-2)

このように増幅器の内部雑音を外出しにして別の 2 ポート回路網に置き換える事で、デバイスの特性パラメータ(ノイズレスの 2 ポート回路網)は \mathbf{NF} 計算に関係しなくなります。従って、最終的には \mathbf{NF} を考察するときは、図 1 の回路を図 4 の回路に置き換えて考えてもよいことになります。

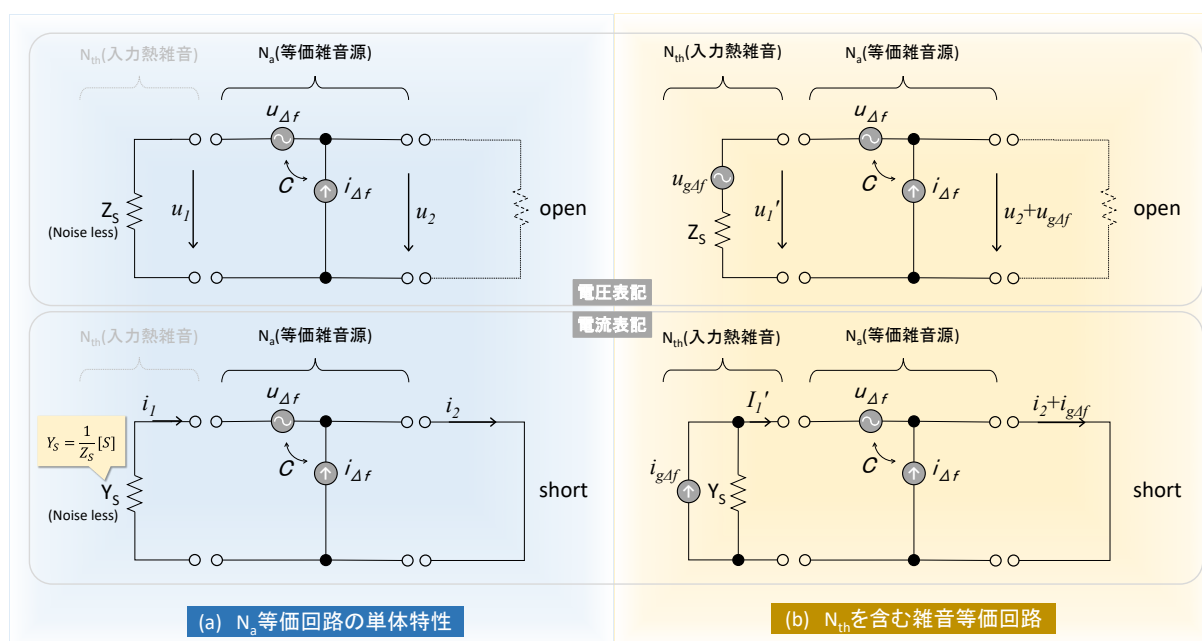


図 4 雑音等価回路を簡略化する。(クリックで拡大する)

図 4 は、この後の展開を考慮して、電圧表記の等価回路と電流表記の等価回路の両方を掲載しました。また入力熱雑音 N_{th} は Z_S と $u_{g\Delta f}$ 、または Y_S と $i_{g\Delta f}$ の組み合わせに置き替えて、信号源 S は記載を省略しています。まず図 4(a)の等価回路で考察します。等価回路の入力には信号源インピーダンス Z_S (電流表記では、信号源アドミッタンス Y_S)が接続されていますが、この素子がノイズレスだと仮定(この素子だけ絶対 0 度に冷えていると仮定)します。また、出力にはノイズレスの 2 ポート回路網が接続される訳ですが、これも一旦開放状態(電流表記では短絡状態)で考察します。この時の等価回路(a)の出力雑音電圧(瞬時値)(電流表記では出力雑音電流(瞬時値))が $u_2[V]$ (電流表記では $i_2[A]$)であったとすると、(b)に示すように信号源インピーダンス Z_S の両端に熱雑音電圧 $u_{g\Delta f}$ が観測される状態(電流表記では信号源アドミッタンス Y_S に熱雑音電流 $i_{g\Delta f}$ が観測される状態)においては、雑音等価回路の出力電圧は $u_2+u_{g\Delta f}[V]$ (電流表記では出力電流は $i_2+i_{g\Delta f}[A]$)になります。増幅器の雑音指数(NF)は、入出力信号電力をそれぞれ S_i, S_o 、入出力雑音電力をそれぞれ N_i, N_o とすると

$$NF = \frac{S_i / S_o}{N_i / N_o} = \frac{S_i N_o}{S_o N_i} = \frac{1}{G_p} \frac{N_o}{N_i} \quad (\text{式 1-3})$$

でした(第 26 話の(式 5-1)参照)。ここで G_p は回路網(デバイス)の電力利得ですが、今考察している等価雑音源の通過利得は 1 ですから、

$$\begin{aligned} NF &= \frac{|u_2|^2 + |u_{g\Delta f}|^2}{|u_{g\Delta f}|^2} = 1 + \frac{|u_2|^2}{|u_{g\Delta f}|^2} \quad (\text{電圧表記}) \\ NF &= \frac{|i_2|^2 + |i_{g\Delta f}|^2}{|i_{g\Delta f}|^2} = 1 + \frac{|i_2|^2}{|i_{g\Delta f}|^2} \quad (\text{電流表記}) \end{aligned} \quad (\text{式 1-4})$$

となります。後段の 2 ポート回路網がノイズレスなら入力インピーダンスがどのような値であっても $|u_2|^2$ の $|u_{g\Delta f}|^2$ に対する比(電流表記では $|i_2|^2$ の $|i_{g\Delta f}|^2$ に対する比)は不変になります。

話を N_a の等価雑音源回路網の話に戻します。実際には $u_{\Delta f}$ と $i_{\Delta f}$ には相関があるため(式 1-2)を扱うときは $u_{\Delta f}$ と $i_{\Delta f}$ の相関関数 C を考慮する必要がありますが、ここでは回路として考察しやすくするために、 $i_{\Delta f}$ を図 5 の左側に示すように $u_{\Delta f}$ と相関のある $i_{c\Delta f}$ と相関のない $i_{n\Delta f}$ に分けます。

そして $i_{c\Delta f}$ については図 5 の右側に示すように、両者の相関関係を表すアドミッタンス Y_C を定義(式 1-5)して、これと $i_{n\Delta f}$ の組み合わせで表現します。

$$i_{c\Delta f} = Y_C u_{\Delta f}$$

(式 1-5)

なお、図 5 において出力側に $-Y_C$ が挿入されているのは、 $u_{\Delta f} = u_1 - u_2$ の関係にあるためです。

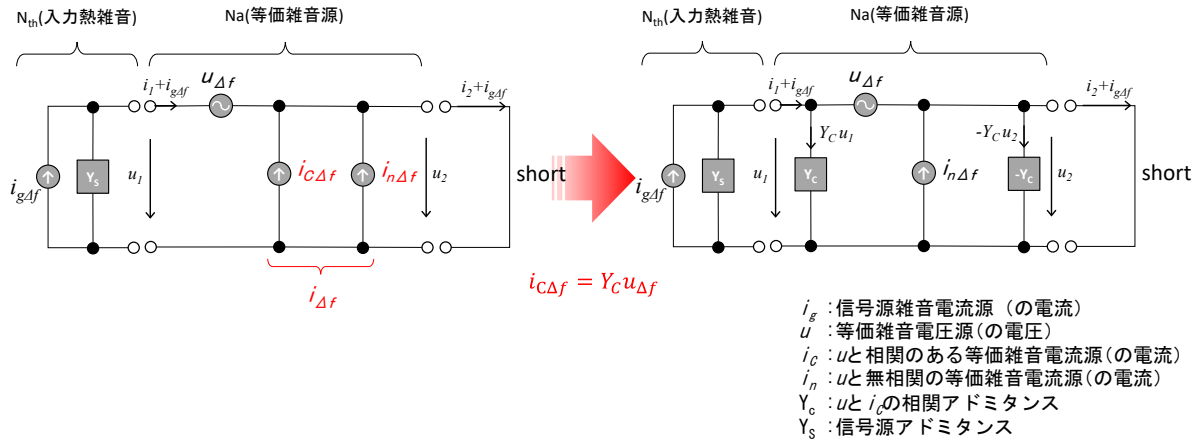
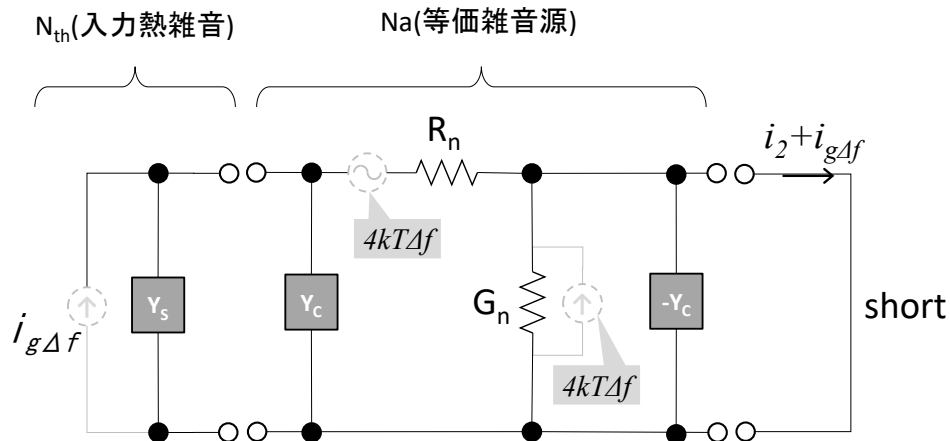


図 5 u と i の相関関数を相関コンダクタンス Y_C に置き換え (クリックで拡大します)

最後に $u_{\Delta f}$ と $i_{n\Delta f}$ を熱雑音を伴う抵抗、すなわち等価雑音抵抗 R_n (式 1-6) と熱雑音を伴うコンダクタンス、すなわち等価雑音コンダクタンス G_n (式 1-7) に置き換えると、 Na の等価回路が完成します(図 6)。

$$R_n = \frac{\overline{u_{\Delta f}^2}}{4kT\Delta f} \quad \overline{u_{\Delta f}^2} \text{ は } u_{\Delta f} \text{ の 2 乗平均} \quad (式 1-6)$$

$$G_n = \frac{\overline{i_{n\Delta f}^2}}{4kT\Delta f} \quad \overline{i_{n\Delta f}^2} \text{ は } i_{n\Delta f} \text{ の 2 乗平均} \quad (式 1-7)$$



- i_g : 信号源雑音電流源 (の電流)
- R_n : 等価雑音抵抗(等価雑音電圧源の内部抵抗)
- G_n : 等価雑音コンダクタンス(等価雑音電流源の内部コンダクタンス)
- Y_C : u と i の相関アドミタンス
- Y_S : 信号源アドミタンス

図 6 u と i を等価雑音抵抗と等価雑音コンダクタンスに置き換え

ようやく等価雑音抵抗 R_n が登場しました。デバイスのデータシートには R_n しか掲載されませんが、一般化された雑音等価回路では、 R_n, G_n, Y_C がセットで内部雑音電圧／電流の大きさを表すパラメータとなっています。

■ 2. 雑音等価回路と NF の関係

雑音等価回路が定まったので、続いて NF と R_n, G_n, Y_C の関係を整理します。雑音等価回路においては、NF は(式 1-4)で定義されます。これを図 5、図 6 の等価回路に当てはめる為には、 i_2 (または u_2)を知る必要があります。 i_2 は最終的に図 7 に青と黄色の網掛けで示した経路の電流の和になります。従って、

$$i_2 = i_{n\Delta f} + u_{\Delta f}(Y_S + Y_C) \tag{式 2-1}$$

また i_2 の 2 乗平均値は

$$|i_2|^2 = |i_{n\Delta f}|^2 + |u_{\Delta f}|^2 |Y_S + Y_C|^2 \tag{式 2-2}$$

となります。

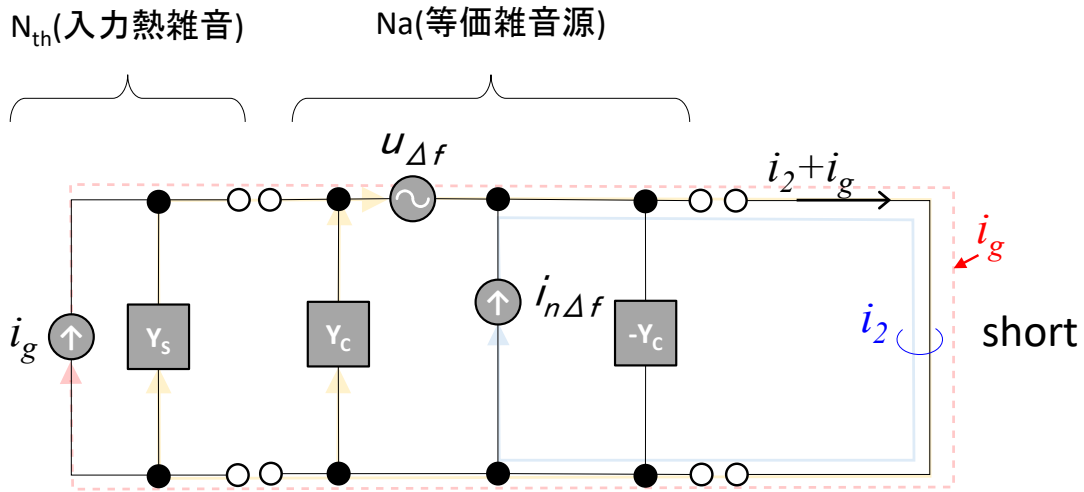


図 7 i_2 の内訳

この関係を(式 1-4)に当てはめると、NF は(式 2-3)のよう R_n, G_n, Y_C で表現できます。

$$\begin{aligned}
 NF &= 1 + \frac{|i_2|^2}{|i_g|^2} = 1 + \frac{|i_{n\Delta f}|^2 + |u_{\Delta f}|^2 |Y_S + Y_C|^2}{|i_g|^2} \\
 &= 1 + \frac{G_n}{G_S} + \frac{R_n}{G_S} |Y_S + Y_C|^2 = 1 + \frac{G_n}{G_S} + \frac{R_n}{G_S} [(G_S + G_C)^2 + (B_S + B_C)^2]
 \end{aligned}$$

但し、 $Y_S = G_S + jB_S$, $Y_C = G_C + jB_C$

(式 2-3)

ここで、 $B_S + B_C = 0$ すなわち $B_S = -B_C$ の関係とすることができれば(式 2-3)は(式 2-4)となり、

$$NF = 1 + \frac{G_n}{G_S} + \frac{R_n}{G_S} (G_S + G_C)^2$$

(式 2-4)

この時の、NF を最小にする G_S の値 $G_{S\text{OPT}}$ は(式 2-5)に示す通りとなります。

$$G_{S\text{OPT}} = \left(\frac{G_n}{R_n} + G_C \right)^{\frac{1}{2}}$$

(式 2-5)

従って、NF 最小の信号源反射係数 Γ_{OPT} は(式 2-5)とその算出条件から(式 2-6)、(式 2-7)で求められます。

$$Y_{S\ OPT} = G_{S\ OPT} - jB_C = \left(\frac{G_n}{R_n} + G_C^2 \right)^{\frac{1}{2}} - jB_C \quad (\text{式 2-6})$$

$$\Gamma_{OPT} = \frac{1 - Y_{S\ OPT}}{1 + Y_{S\ OPT}} \quad (\text{式 2-7})$$

そして、信号源インピーダンスが Γ_{OPT} の時の NF すなわち F_{min} は

$$F_{min} = 1 + 2R_n(G_{S\ OPT} + G_C) \quad (\text{式 2-8})$$

故に G_n, Y_C は $Y_{S\ OPT} = G_{S\ OPT} + jB_{S\ OPT}$ とおくと、

$$G_C = \frac{F_{min} - 1}{2R_n} - G_{S\ OPT}, \quad Y_C = G_C + jB_{S\ OPT} \quad (\text{式 2-9})$$

$$G_n = R_n G_C^2 - G_{S\ OPT}^2 \quad (\text{式 2-10})$$

となり、 Γ_{OPT} 、 F_{min} 、 R_n が求まれば N_a を構成する残りのノイズパラメータ G_n 、 Y_C は導出することができます。

ここまで説明して、お気づきになられた方もおられると思いますが、これらノイズパラメータを導出する過程においては、デバイスの入力インピーダンス (S_{11} 、 y_{ie} 、または h_{ie}) は一切登場しません。つまり NF 最小となる整合条件はデバイスの入力インピーダンスとは関係なく、等価雑音電圧源のインピーダンス Z_n 、等価雑音電流源のアドミタンス Y_n と信号源インピーダンスの関係のみで決定されます。この結果、第 28 話でご説明した通り NF 最小の整合条件は電力整合の条件 ($Z_{in} = S_{11}^*$) とは必ずしも一致しない(基本的に一致しない)事になります。

■ 3. 第 29 話のまとめ

第 29 話では雑音等価回路とノイズパラメータの関係をご説明しました。面倒くさい計算が延々と続いて辟易とされた方もおられると思います。面倒なプロセスでしたが、これでノイズパラメータの使い方を説明するお膳立てが完了しました。次回はノイズパラメータを使って増幅回路の NF を見積もるツール「定 NF 円」について解説します。以下、第 29 話の要点です。

- (1) NF が最小になる入力整合条件と電力利得が最大になる電力整合の条件は基本的に一致しない。
- (2) 増幅デバイスが発する雑音は「雑音等価回路」と呼ばれる線形等価回路に置換えて、これがノイズレスの増幅器の入力に接続されたものとして取り扱う。
- (3) 雑音起電力は、電圧源、電流源共に $4kTB$ となるため、等価回路上において雑音源は、電圧源の場合は抵抗に、電流源の場合はコンダクタンスに置き換える事が可能である。
- (4) 等価雑音抵抗 R_n とは、デバイスが発生する雑音(N_a)をそのデバイスの入力に雑音源が接続されたと想定した 4 端子回路網(雑音等価回路)で表現したときの雑音電圧源を抵抗に置き換えたものである。
- (5) 雑音等価回路のパラメータには R_n 以外に等価雑音コンダクタンス G_n 、等価雑音源相関アドミッタンス Y_C が存在するが、これらは R_n 、 Γ_{OPT} 、 F_{min} から導出することができる。

第 29 話は以下の文献を参考にさせていただきました。

A.Ambrózy 著 高木 相, 越後 宏 訳 電子ノイズ pp.115-128 啓学出版 1988

Christian Gentili Microwave Amplifiers and Oscillators pp.47-52 McGraw-Hill 1987

【お知らせ】

この度、Mr.Smith ver4.1 をアップデートしました。バグ修正のみですので認証キーを既にご購入頂いた方は再度購入頂く変更はありません。Vector よりダウンロードしてご利用ください

<https://www.vector.co.jp/soft/winnt/business/se521255.html>

新しいバージョンでは以下の不具合を解消/改善しています。

- ・周波数点数の多いマーカーをクリップボードからペーストした際にエラーが発生する問題を修正
 - ・smt ファイルをダブルクリックして起動したときにエラーになる事象を改善
 - ・csv ファイルをロードしたあと、上書き保存すると元の csv ファイルを壊す問題を解消
 - ・マウス右クリックで表示されるコンテキストメニューの一部が動作しない問題を修正
- 最新のバージョンは ver.4.1.2.37 となります。